

# 多结点样条插值及其多尺度细化算法

李华山<sup>1</sup> 丁玮<sup>2</sup> 齐东旭<sup>1</sup>

(1. 北方工业大学 CAD 研究中心, 北京 100041; 2. 吉林大学计算机科学系, 长春 130023)

**摘要** 针对曲线与曲面拟合问题, 研究多结点样条插值方法。这类方法具有基数型、显式计算(无须求解方程组)及局部性等优点。主要的新结果是: 对多结点样条基本函数的构造给出了新的表述; 提出一类新的不带移动的混合型多结点样条基本函数; 基于多尺度分析的思想, 给出了一种自适应的细化算法, 它对消减采样数据的相关性是简便有效的。

**关键词** 多结点样条, 细化, 插值, 曲线拟合

## 1 引言

多结点(many-knot)样条插值法最早见诸于论文是1975年。这类样条插值函数是在通常样条函数中引入更多的附加结点。一般说来, 人们认为结点的增多会带来计算上的麻烦, 从而很少注意它带来好处的一面。在文献[1~6]的一系列论文中, 首先构造了多结点样条的基函数。这类多结点样条基函数是基数型的, 使得插值过程无须求解方程组。还值得注意的是基函数的有界支集性质, 它保证了插值曲线及曲面的局部性, 有利于数据处理。从表1中, 可以看到多结点样条函数的独特之处。

表1 多结点样条插值与常见方法的比较

Table 1 Comparison between many-knot spline interpolation and usual methods

方法	通过型值点	无须解方程组	局部性
Lagrange 多项式插值	√	√	×
Bernstein-Bezier 拟合	×	√	×
B 样条拟合	×	√	√
样条插值	√	×	×
多结点样条插值	√	√	√

针对常见方法的不便之处, 多结点样条插值法

的设计适应了某些重要实际问题的需要, 并已由提出者作了广泛、灵活地应用, 如飞机外形、进气道、机翼以及海洋、地质的数据处理乃至动画片的计算机制作(见文献[7~11])。国外著名数学家 W. Dahmen、T. N. T. Goodman 和 A. Micchelli 注意到多结点样条插值的理论价值, 给出了深入的讨论。最近, S. D. Riemenschneider 与 Zuowei Shen 又将多结点样条插值在理论上推广到更一般情形<sup>[3]</sup>。本文重点从应用角度研究多结点样条函数插值方法。主要的新结果是: 对多结点样条基本函数的构造给出新的表述; 提出不带移动的混合型多结点样条基本函数; 基于多尺度分析的思想, 提出一种自适应细化算法, 它对消减采样数据的相关性是简便有效的。文中所附图例是在 PC486DX4、Windows 95 和 Borland C++ 环境下完成的。

## 2 次多结点样条基本函数的构造

熟知, 以  $\{-\frac{k+1}{2}, -\frac{-k-1}{2}, \dots, \frac{k+1}{2}\}$  为结点集的  $k$  次样条基本函数可表示为

$$\Omega_k(x) = \bar{\Delta}^{k+1} x_+^k / k! = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k+1} (-1)^j \binom{k+1}{j} \left( \frac{k+1}{2} - j + x \right)_+^k \quad (1)$$

其中  $x_+^k = \max\{x^k, 0\}$ ,  $\bar{\Delta}$  为中心差分算子。记

$$E^\lambda f(x) = f(x + \lambda), \quad (2)$$

$$\mu^\lambda = (E^\lambda + E^{-\lambda})/2$$

容易验证对任意实数  $\lambda \neq 0$ , 函数  $E^\lambda \Omega_k(x)$  与  $\Omega_k(x)$  是线性独立的。现取

$$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} \quad (3)$$

$$\Omega_k(x), E^{\lambda_1} \Omega_k(x), E^{\lambda_2} \Omega_k(x), \dots, E^{\lambda_{k-1}} \Omega_k(x) \quad (4)$$

我们的目的是从这组函数的组合得到新的函数, 注意式(1)和式(2), 令

$$q_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \mu^{\lambda_j} \Omega_k(x),$$

$$\lambda_0 = 0, E^0 = I (\text{单位算子}), k \in Z \quad (5)$$

使之满足  $q_k(0) = 1$  及  $q_k(m) = 0$  当  $m \neq 0, m \in Z$ 。记  $\text{supp}(f(x))$  为  $f(x)$  的支集,  $|\text{supp} f(x)|$  表示  $f$  的支集测度, 则有

$$S_0^k = \text{supp}(\Omega_k(x)) = \left( -\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2} \right)$$

$$S_j^k = \text{supp}(\mu^{\lambda_j} \Omega_k(x)) = \left( -\frac{k+1}{2} - \lambda_j, \frac{k+1}{2} + \lambda_j \right), \lambda_j > 0$$

$$S^k = \text{supp}(q_k(x)) = \left( -\frac{k+1}{2} - \lambda_{k-1}, \frac{k+1}{2} + \lambda_{k-1} \right) \setminus Z_k$$

其中

$$Z_k = \{Z \setminus \{0\}\} \cap \left\{ \bigcup_{j=1}^{k-1} S_j^k \right\}$$

$$|S_0^k| = k + 1, |S_j^k| = k + 1 + 2\lambda_j,$$

$$|S^k| = k + 1 + 2\lambda_{k-1}$$

在式(3)中, 取  $\lambda_{k-1} \leq \frac{1}{2}$ , 则  $|S^k - S_0^k| \leq 1$ 。这时以  $\{q_k(x-i), i \in Z\}$  为调配函数的插值曲线(曲面)将得到良好的局部性。由式(4)所示函数的独立性, 容易验证线性方程组

$$1 = q_k(0) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \mu^{\lambda_j} \Omega_k(x) \Big|_{x=0}$$

$$0 = q_k(m) = \sum_{j=0}^{k-1} c_j \mu^{\lambda_j} \Omega_k(m),$$

$$m = 1, 2, \dots, k-1$$

是可解的, 由此求出  $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$  便得到式(5)所示的  $q_k(x)$ 。

显然,  $q_k(x)$  依赖于参数  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}$ , 从实际应用的角 度, 选择  $\lambda_j$  等距分布对消除相关性更为有利, 通常取

$$\lambda_j = \frac{j}{2(k-1)}, j = 1, 2, \dots, k-1$$

文献[1]~[4]对  $k=2m$  及  $k=2m+1 (m \in Z)$  的情形作了分别考虑, 并在  $k=2m+1$  的情形取  $\lambda_j =$

$j/(k-1)$ 。实际上, 我们经常使用  $k=2, 3$  的情形。这时, 从式(5)式得到多结点样条基本函数的如下简洁表达式

$$q_2(x) = 2\Omega_2(x) - \frac{1}{2} \left[ \Omega_2(x + \frac{1}{2}) + \Omega_2(x - \frac{1}{2}) \right]$$

$$q_3(x) = \frac{10}{3} \Omega_3(x) - \frac{4}{3} \left[ \Omega_3(x + \frac{1}{2}) + \Omega_3(x - \frac{1}{2}) \right] + \frac{1}{6} \left[ \Omega_3(x + 1) + \Omega_3(x - 1) \right]$$

利用  $\Omega_2(x), \Omega_3(x)$  对称性, 从式(1)得如下具体的简洁算式

$$\Omega_2(x) = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{3}{2} - |x| \right)_+^2 - 3 \left( \frac{1}{2} - |x| \right)_+^2 \right],$$

$$\Omega_3(x) = \frac{1}{6} \left[ (2 - |x|)_+^3 - 4(1 - |x|)_+^3 \right] \quad (6)$$

### 3 多结点样条基本函数的混合形式

另一类多结点样条基本函数, 记为  $P_k(x)$ , 它与一般基本样条函数  $\Omega_k(x)$  具有相同的跨度  $(-\zeta_k, \zeta_k), \zeta_k = (k+1)/2, k \in Z$ , 且有

$$(-\zeta_k, \zeta_k) \supset (-\zeta_{k-1}, \zeta_{k-1}) \supset \dots \supset (-\zeta_0, \zeta_0) \quad (7)$$

我们用基本样条函数的组合形成多结点样条基本函数, 令

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{\langle \frac{k+1}{2} \rangle} d_j \Omega_{k-j}(x), k \in Z \quad (8)$$

其中  $\langle \frac{k+1}{2} \rangle$  表示小于  $\frac{k+1}{2}$  的最大整数。由式(7)知  $p_k(x)$  的跨度为  $(-\zeta_k, \zeta_k)$ , 从条件  $p_k(0) = 1, p_k(m) = 0$  当  $m \in Z, m \neq 0$  得到如下方程组

$$\sum_{j=0}^{\langle \frac{k+1}{2} \rangle} d_j \Omega_{k-j}(0) = 1$$

$$\sum_{j=0}^{\langle \frac{k+1}{2} \rangle} d_j \Omega_{k-j}(m) = 0, m = 1, 2, \dots, \langle \frac{k+1}{2} \rangle$$

当  $k=2m$  为偶数时, 方程组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} \Omega_{2m}(0) & \Omega_{2m-1}(0) & \Omega_{2m-2}(0) & \dots & \Omega_m(0) \\ \Omega_{2m}(1) & \Omega_{2m-1}(1) & \Omega_{2m-2}(1) & \dots & \Omega_m(1) \\ \Omega_{2m}(2) & \Omega_{2m-1}(2) & \Omega_{2m-2}(2) & \dots & \Omega_m(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{2m}(m) & \Omega_{2m-1}(m) & \Omega_{2m-2}(m) & \dots & \Omega_m(m) \end{bmatrix} \quad (9)$$

注意  $\Omega_k(x)$  的有界支集性质,有

$$\Omega_{k-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) = \begin{cases} \Omega_{2m-1}(m) = 0, k = 2m \\ \Omega_{2m}(m) > 0, k = 2m + 1 \end{cases}$$

于是  $d_0 = 0$ , 方程组化为对  $k$  为奇数的情况。因此从式(8)得到的仅是奇数次的基本样条函数

$$p_{2m-1}(x) = \sum_{j=0}^{m-1} d_j \Omega_{2m-1-j}(x), m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

当  $m=2$  时,由式(6)易知  $\Omega_3(0) = \frac{2}{3}, \Omega_3(1) = \frac{1}{6},$

$\Omega_2(0) = \frac{3}{4}, \Omega_2(1) = \frac{1}{8}$ 。由式(9)得到方程组

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0/6 \\ d_1/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解出  $d_0 = -3, d_1 = 4$ 。当  $m=3$  时,由

$$\begin{aligned} \Omega_4(x) &= \frac{1}{24} \left[ \left(\frac{5}{2} - |x|\right)_+^4 - 5\left(\frac{3}{2} - |x|\right)_+^4 + 10\left(\frac{1}{2} - |x|\right)_+^4 \right] \\ \Omega_5(x) &= \frac{1}{120} \left[ (3 - |x|)_+^5 - 6(2 - |x|)_+^5 + 15(1 - |x|)_+^5 \right] \end{aligned}$$

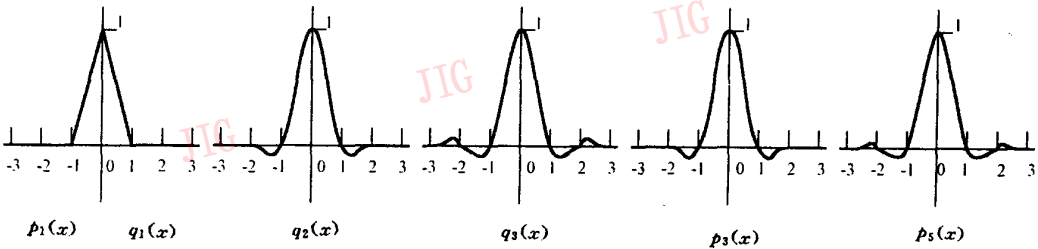


图 1 多结点基本样条函数

Fig. 1 Base many-knot spline function

### 4 多结点样条插值曲线与曲面

设  $P_0, P_1, \dots, P_N$  为给定的有序型值点列。如果另外已知边界约束条件,则可使型值点得到延拓,否则通过简单平移、重点或线性与非线性外插得到延拓型值点  $P_{-1}, P_{-2}, \dots$  及  $P_{N+1}, P_{N+2}, \dots$ 。在常用的低次多结点样条情形,只需 1 个或 2 个延拓点。这样一来,插值曲线表达为

$$P(t) = \sum_{j=-2}^{N+2} P_j \varphi_j(t), \varphi_j(t) = q_3(t-j) \text{ 或 } p_5(t-j), t \in [0, N] \quad (11)$$

知  $\Omega_4(0) = \frac{115}{192}, \Omega_4(1) = \frac{19}{96}, \Omega_4(2) = \frac{1}{384}, \Omega_5(0) = \frac{11}{20}, \Omega_5(1) = \frac{13}{60}, \Omega_5(2) = \frac{1}{120}$ 。由式(9)得到方程组

$$\begin{pmatrix} 66 & 230 & 4 \\ 26 & 76 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_0/120 \\ d_1/384 \\ d_2/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解出  $d_0 = \frac{10}{3}, d_1 = -\frac{32}{3}, d_2 = \frac{25}{3}$ 。这样一来,我们有

$$p_3(x) = -3\Omega_3(x) + 4\Omega_2(x)$$

$$p_5(x) = \frac{10}{3}\Omega_5(x) - \frac{32}{3}\Omega_4(x) + \frac{25}{3}\Omega_3(x)$$

$q_1(x), q_2(x), q_3(x)$  及  $p_1(x), p_3(x), p_5(x)$  的图象如图 1 所示。

可以证明  $\int_{-\infty}^{\infty} q_k dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} p_k(x) dx = 1$  并且对任意实数  $x$ , 有

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_k(x+i) = 1, \sum_{i=-\infty}^{\infty} P_k(x+i) = 1$$

$$P(t) = \sum_{j=-1}^{N+1} P_j \Psi_j(t), \Psi_j(t) = q_2(t-j) \text{ 或 } p_3(t-j), t \in [0, N] \quad (12)$$

注意到  $|\text{supp}(q_2(x))| = 4, |\text{supp}(q_3(x))| = 6, |\text{supp}(p_3(x))| = 4, |\text{supp}(p_5(x))| = 6$ , 于是式(11)及式(4.2)中的求和应分别写成

$$P(t) = \sum_{j=[t]-2}^{[t]+3} P_j \varphi_j(t),$$

$$P(t) = \sum_{j=[t]-1}^{[t]+2} P_j \Psi_j(t), t \in [0, N]$$

其中  $[t]$  表示不超过  $t$  的最大整数。图 2(a)、(b)、(c) 给出延拓型值点的不同方式示意图;图 3 给出多结点样条插值曲线与  $B$  样条曲线的比较。在(a)图

中  $B$  样条不保证通过型值点,致使拟合曲线不令人满意。假如采用所谓“反求控制点”的作法则要通过求解线代数方程组,增大了计算量,并且由于“反求”的作法违背了显式拟合的本意,是不可取的。

现在讨论曲面插值。我们针对乘积型网格点插值的情形。设  $\{P_{ij}\}$  为给定的型值点矩阵,假设延拓型值点的型值点矩阵仍以  $\{P_{ij}\}$  表示,则插值曲面表达式为

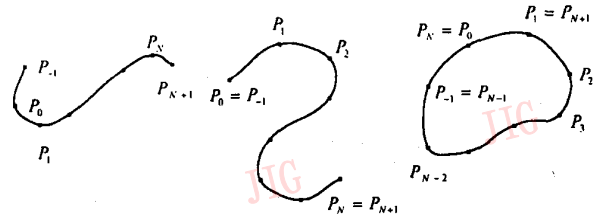
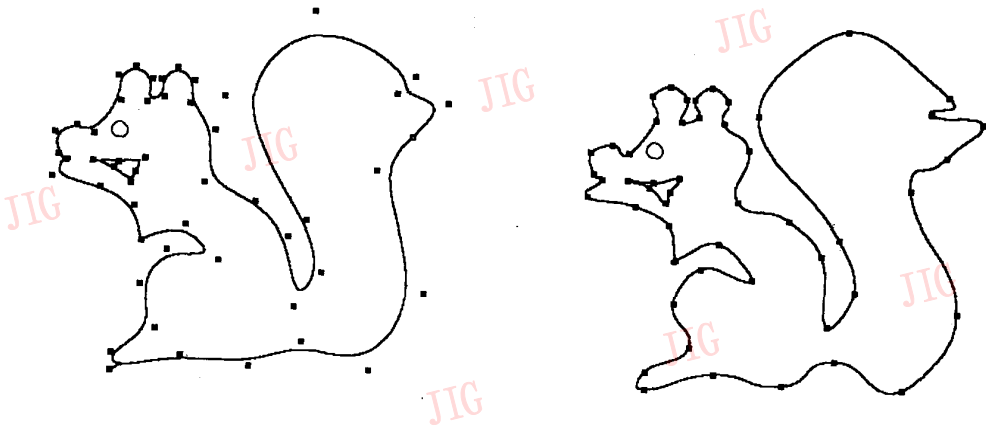


图2 多结点样条插值的边界处理  
Fig. 2 Boundary process of many-knot spline interpolation



(a) B 样条曲线(B-spline curve) (b)多结点样条曲线(Many-knot spline curve( $p_3(t-j)$ ))

图3 多结点样条插值与 B 样条插值曲线拟合的比较

Fig. 3 Comparison between many-knot spline interpolation and B-spline interpolation curve-fitting

$$P(u,v) = \sum_i \sum_j P_{ij} \Phi_{ij}(u,v),$$

$$u \in [0,M], v \in [0,N],$$

$$i = 0, 1, \dots, M, j = 0, 1, \dots, N$$

其中,  $\Phi_{ij}(u,v)$  可如下选取:

$$\Phi_{ij}(u,v) = \varphi_i(u)\varphi_j(v), \Phi_{ij}(u,v) = \varphi_i(u)\Psi_j(v),$$

$$\Phi_{ij}(u,v) = \Psi_i(u)\varphi_j(v), \Phi_{ij}(u,v) = \Psi_i(u)\Psi_j(v)$$

### 5 数据的自适应选取

在数据的曲线(曲面)拟合问题中,给定的数据往往具有很强的相关性。用样条函数方法平滑给定数据时注意去掉冗余的数据,将给存储、传输及绘图带来很多方便。我们这里提出的自适应算法基于多尺度分析思想,首先保证低频成份的准确性,它是视觉感受上的最主要成分。为了使结果精确化,采用了逐次增添高频成份的递归过程。以二次多结点样条

插值为例(曲面情形类同,不赘述),设有  $\{y_j\}$ ,  $y_j$  为相应于  $t_j$  的给定(采样)数据,  $t_j = t_0 + j\Delta t$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2^n$ 。令

$$S_k^0 = \{t_j^{(k)}, j = 0, 1, \dots, 2^{k+1}\} \quad (13)$$

其中

$$t_{2m}^{(k)} = t_m^{(k-1)}, t_{2m+1}^{(k)} = \frac{t_m^{(k-1)} + t_{m+1}^{(k-1)}}{2}$$

$$m = 0, 1, \dots, 2^k$$

取  $t_0^{(0)} = 0, t_1^{(0)} = 2^{n-1}\Delta t, t_2^{(0)} = 2^n\Delta t$ 。记  $2^n = N$ , 且把  $S_k^{(0)}$  作等距外延之后相应的扩充集合记为  $S_k$ , 我们有

$$F(t) = \sum_{j \in S_0} y_j \varphi(t-j), t \in [0, N] \quad (14)$$

$$R_0(j) = F(j) - y_j, j \in S_1$$

$$R_1(t) = \sum_{j \in S_1} R_0(j) \varphi(2t-j), t \in [0, N]$$

由多结点样条基本函数的性质,显然有  $R_1(i) = 0$ ,

当  $i \in S_0$ 。一般说来,令

$$R_k(t) = \sum_{j \in S_k} R_{k-1}(j) \varphi(2^k t - j),$$

$$t \in [0, N], k = 1, 2, \dots \quad (15)$$

则有

$$R_k(i) = 0, i \in S_{k-1}, k = 1, 2, \dots \quad (16)$$

由式(5.1),可知  $S_0^0, S_1^0, \dots$  是逐次细化而得到的序列,且有  $S_0^0 \subset S_1^0 \subset \dots \subset S_{n-1}^0$

式(14)表示最大尺度下的插值函数,式(15)表示更高分辨率层次下的误差补偿。式(16)表示每次

细化都可以删掉一些数据,特别在式(15)中任何指定的第  $k$  步,都可以适当取阈值  $\epsilon_k > 0$ , 当  $|R_k(j)| < \epsilon_k$  时,认为  $R_k(j) = 0$ 。这样一来,式(14)、(15)给出的细化过程使采样数据在满足精度要求的情况下得到合理删减。图 4 给出了数值例子。这个例子来自天文与气候的研究\* 可能最大日平均日照值  $N$  是作物潜在需水量计算的重要参数,它依赖纬度  $B$  与月份  $M$ 。表 2 中给出的数据认为是精确的。用三次多结点样条基函数 形成调配函数,给出二元函数  $N = N(B, M)$ 。

表 2 可能最大日平均日照值数据 (单位 hr/α)

Table 2. Possible largest average sun shine value data (unit hr/α)

M \ B	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
10°	11.6	11.8	12.0	12.3	12.6	12.7	12.6	12.4	12.1	11.8	11.6	11.5
15°	11.3	11.6	12.0	12.5	12.8	13.0	12.9	12.6	12.2	11.8	11.4	11.2
20°	11.0	11.5	12.0	12.6	13.1	13.3	13.2	12.8	12.3	11.7	11.2	10.9
25°	10.7	11.3 <sup>1,2</sup>	12.0	12.7	13.3	13.7 <sup>1,2</sup>	13.5	13.0	12.3	11.6 <sup>1,2</sup>	10.9	10.6 <sup>1,2</sup>
30°	10.4	11.1	12.0	12.9	13.6	14.0	13.9	13.2	12.4	11.5	10.6	10.2
35°	10.1	11.0	11.9	13.1	14.0	14.5	14.3	13.5	12.4	11.3	10.3	9.8 <sup>1</sup>
40°	9.6	10.7	11.9	13.3	14.4	15.0	14.7	13.7	12.5	11.2	10.0	9.2

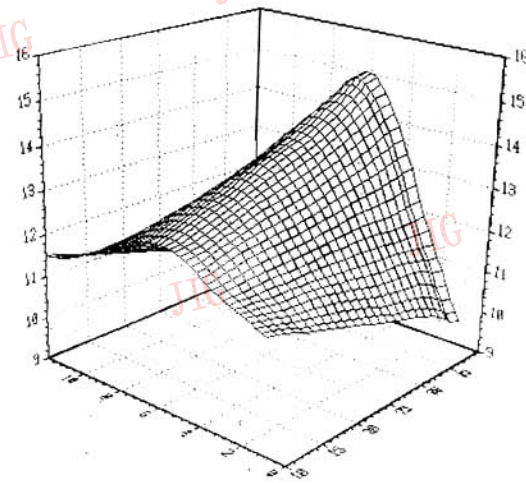


图 4 数据自适应选取的数值例子

Fig. 4 Numeric example of self-fitting data choosing

k	$\epsilon_k$	最大误差	均方差	需要记录值的个数
1	0.5	0.405 313	0.015 163	5 (表 2 中上标为“1”的点)
2	1.0	0.672 887	0.048 023	4 (表 2 中上标为“2”的点)

参考文献

- 1 齐东旭. 关于多结点基函数型插值(I), (II), (III). 吉林大学自然科学学报, 1975(2); 1976(2); 1979(3).
- 2 齐东旭, 梁振珊. 多结点样条磨光(I), (II). 高等学校计算数学学报, 1979(2); 1981(1).
- 3 Qi Dongxu. A Class of Local Explicit Many-knot Spline Interpolation Schemes. MRC, University of Wisconsin(Madison), TSR 2238, 2242, 1981.
- 4 齐东旭. 多结点样条插值曲线与曲面的矩阵表达及余项估计. 计算数学, 1982(3).
- 5 Qi Dongxu, Zhou Shuzi. Local Explicit Many-knot Spline Hermite Approximation Schemes, MRC, University of Wisconsin (Madison), TSR 2359, 1982. J. of Computation Math., 1983, 1(4).
- 6 周叔子, 齐东旭. 关于多结点 Hermite 样条. 湖南数学年刊, 1983, 3(1).

\* 数据来自“多变量曲线组的公式拟合”, 傅骅, 云南省水利水电勘测设计研究院(昆明), 1996.

- 7 Qi Dongxu, Gao Mingyan, Many-knot Spline Interpolation and Boolean Surfaces. *Proceedings of International Symposium CAD-DM*, 1987.
- 8 齐东旭, 田自贤, 张玉心等. 样条函数在飞机理论外形设计中的应用. *飞机设计*, 1982(4).
- 9 计算机卡通片《咪咪钓鱼》. 北方工业大学 CAD 研究中心与北京电视台. 北京电视台演播, 1991.
- 10 计算机电影片《相似》. 北方工业大学 CAD 研究中心与北京科学教育电影制片厂广播电影电视部电影发行局发行, 1992.
- 11 齐东旭. 分形及其计算机生成. 北京: 科学出版社, 1994.
- 12 Dahmen W, Goodman T N T, Micchelli A. *Compactly Supported Fundamental Functions for Spline Interpolation*, *Numerische Mathematik*, 1988(52).
- 13 Riemenschneider S D, Shen Zuwei. General interpolation on the lattice: Compactly supported fundamental solutions. *Analysis and Approximation Theory Seminar*. University of Alberta, 1994.



李华山, 教授, 1975年毕业于吉林大学数学系计算数学专业。现任北方工业大学CAD研究中心副主任, 工业设计专业教研室主任。主要研究方向为计算机图形学和计算数学。

## Many-knot Spline Interpolation and Multi-scale Refinement Algorithm

Li Huashan<sup>1</sup>, Ding Wei<sup>2</sup>, Qi Dongxu<sup>1</sup>

(1 CAD Research Center, North China University, Beijing 100041)

(2 Computer Science Department, Jilin University, Changchun 130023)

**Abstract** This paper is aimed at fitting curves and surfaces, investigating many-knot spline interpolation schemes. This kind of schemes has advantages such as cardinal type, explicit calculation (no need to solve system of equations) and localization. New results are: present new expression for the basic function of many-knot spline interpolation; produce a new kind of hybrid basic function of many-knot spline interpolation without shift; based on the thought of multi-scale analysis, present a self-fitting refinement algorithm that is simple and efficacious for reduces dependence of the sampling data.

**Keywords** Many-knot spline, Refine, Interpolation, Curve-fitting